数理解析研究所講究録 1206 巻 2001 年 114-120

Chen invariant of CR-submanifolds

北海道大学大学院理学研究科　笹原 徹 (Tooru Sasahara)
Department of Mathematics, Hokkaido University

1 序

１９７５年の論文 ([7]) で B.Y.Chen と C.S.Houh は次のような汎関数の臨界点を研究した。$\phi: M^n \to (N, ds^2)$ を n 次元リーマン多様体のはめ込みとし、K をそのコンパクト領域とする。K の境界を固定する滑らかな変分 $\phi_t: K \to (N, ds^2)$, $\phi_0 = \phi$ に対して

$$\mathcal{W}(\phi_t) = \int_K |H|^n dv,$$

ここで $|H|$ は平均曲率 、 また dv は $\phi_t^*(ds^2)$ に関する体積要素である。N が（擬）ユークリッド空間で $n = 2$ の時は Willmore 汎関数であり、また理論物理学の bosonic string theory では Polyakov extrinsic action という名で登場する ([13])。任意の K とその境界を固定する任意の変分に対して $\frac{d}{dt}(\mathcal{W}(\phi_t))|_{t=0}$ となる時、 M^n を stationary 部分多様体 （$n = 2$ のときは Willmore 曲面）と言う。$n > 2$ の場合、そのような例は trivial なものを除いてほとんど知られていなかった。最近 Chen は $|H|$ に関する不等式を構成し、その等号を満たすものとして trivial でない例を構成した。彼はそれを Ideal 部分多様体と名付けた ([5])。それらは、各点での外空間からのテンションが最も少なく、ゆえに stationary 部分多様体の中でも特別なもの（“理想的”）である。 また M. Barros と O. Garay は S^7 の Hopf 部分多様体として $\mathbf{R}^8$ の stationary 部分多様体を構成した ([1])。これに関しては、最後の章を見て頂きたい。今回は、複素空間形、6 次元球面内の Ideal CR 部分多様体に関するいくつかの局所的な分類について紹介する。

2 Chen 不変量

$K(\pi)$ を平面 $\pi \subset T_pM^n$、$p \in M^n$ に関する断面曲率とする。接空間 T_pM^n の正規直交基 $e_1, \ldots, e_n$ に対して p でのスカラー曲率 τ を $\tau(p) = \sum_{i<j} K(e_i \wedge e_j)$ と定義する。L を次元 $r \geq 2$ の T_pM^n の部分空間とし、$\{e_1, \ldots, e_r\}$ を L の正規直交基とした時、 L のスカラー曲率 $\tau(L)$ を $\tau(L) = \sum_{\alpha<\beta} K(e_\alpha \wedge e_\beta)$, $\quad 1 \leq \alpha, \beta \leq r$ と定義する。

整数 $k \geq 0$ に対して $\mathcal{S}(n, k)$ を次の条件を満たす 2 以上の整数の k-tuple $(n_1, \ldots, n_k)$ の集合とする:

$$n_1 < n, \quad n_1 + \cdots + n_k \leq n.$$

n を固定した時、$\mathcal{S}(n,k)$ を $\mathcal{S}(n)$ と書く。各 k-tuple $(n_1,\ldots,n_k)\in\mathcal{S}(n)$ に対して Chen は次のようなリーマン不変量を定義した ([5])。

$$\delta(n_1,\ldots,n_k)(p)=\tau(p)-\inf\{\tau(L_1)+\cdots+\tau(L_k)\}, \tag{2.1}$$

ここで $L_1,\ldots,L_k$ は互いに直交する T_pM の部分空間で $\dim L_j=n_j$, $j=1,\ldots,k$ である。

さらに彼は 実 $2n$ 次元ケーラー多様体に対して次のような不変量 δ^c を定義した。定義は次のとおりである：

任意の k-tuple $(2n_1,\ldots,2n_k)\in\mathcal{S}(2n)$ に対して、

$$\delta^c(2n_1,\ldots,2n_k)=\tau-\inf\{\tau(L_1^c)+\cdots+\tau(L_k^c)\}, \tag{2.2}$$

ここで $L_1^c,\ldots,L_k^c$ は互いに直交する T_pM^{2n} の 複素部分空間でそれぞれの次元は $2n_1,\ldots,2n_k$ である。

3 CR-部分多様体に関する Chen の不等式

概エルミート多様体の CR-部分多様体とは、次の二つの条件をみたす微分可能な接分布 $\mathcal{H}$ が存在することである。

$$\mathcal{H}_p\text{は } J\mathcal{H}_p=\mathcal{H}_p, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{H}_p\text{の直交補空間 } \mathcal{H}_p^\perp\text{は } J\mathcal{H}_p^\perp\subset T_p^\perp M. \tag{3.2}$$

Totally real でも holomorphic でもない CR-部分多様体を *proper* と呼ぶ。これから先、扱う対象は全て proper とする。

$\tilde{M}^m(4c)$ を正則断面曲率 $4c$ の m 次元複素空間形とする。$\mathcal{H}$ の次元が $2n$ であるような $\tilde{M}^m(4c)$ の $(2n+p)$ 次元 CR-部分多様体 M^{2n+p} は、次の不等式を満たす。

$$\delta(n_1,\ldots,n_k)\ \le\ c(n_1,\ldots,n_k)|H|^2+b(n_1,\ldots,n_k)+3n\ \ (c=1), \tag{3.3}$$

$$\delta(n_1,\ldots,n_k)\ \le\ c(n_1,\ldots,n_k)|H|^2-b(n_1,\ldots,n_k)-3n+\frac{3}{2}\sum_{i=1}^k n_i\quad (c=-1). \tag{3.4}$$

ここで各 $(n_1,\ldots,n_k)\in\mathcal{S}(2n+p)$ に対して $c(n_1,\ldots,n_k)$ と $b(n_1,\ldots,n_k)$ は次で与えられる正の定数である。

$$c(n_1,\ldots,n_k)=\frac{n^2(n+k-1-\sum n_j)}{2(n+k-\sum n_j)},$$

$$b(n_1,\ldots,n_k)=\frac{1}{2}\left(n(n-1)-\sum_{j=1}^k n_j(n_j-1)\right).$$

上記の不等式の等号をみたすものを $(n_1,\ldots,n_k)$-*ideal CR*-部分多様体 と呼ぶ。

外空間が一般の場合には任意の部分多様体は次の不等式を満たす。

$$\delta(n_1,\ldots,n_k)\le c(n_1,\ldots,n_k)|H|^2+\tilde{\delta}(n_1,\ldots,n_k) \tag{3.5}$$

ここで $\tilde{\delta}(n_1,\ldots,n_k)=\tilde{\tau}|_{T_pM}-\inf\{\tilde{\tau}(L_1)+\cdots+\tilde{\tau}(L_k)\}$, $\tilde{\tau}|_{T_pM}=\sum_{i<j}\tilde{K}(e_i\wedge e_j)$, $L_j\subset T_pM$, $\tilde{K}$ は 外空間の曲率テンソルである。

4 $\mathbf{C}H^m(-4)$ の Ideal CR-部分多様体

$\mathbf{C}H^m(-4)$ の $(2n+1)$ 次元 $(2,\ldots,2)$-ideal CR-部分多様体は局所的に次のようにして得られる。

Theorem 1 U を $\mathbf{C}^n$ の領域とし、 $\Psi : U \to \mathbf{C}^{m-1}$ を $\delta^c(2,\ldots,2)=0$ をみたす正則等長はめ込みとする。写像 $z:\mathbf{R}^2\times U\to\mathbf{C}^{m+1}_1$ を次で定義する：

$$z(u,t,w_1,\ldots,w_n)=\left(-1-\frac{1}{2}|\Psi|^2+iu,-\frac{1}{2}|\Psi|^2+iu,\Psi\right)e^{it}. \tag{4.1}$$

そのとき $\langle z,z\rangle=-1$ で、$z(\mathbf{R}^2\times U)$ は $H^1_1:=\{\lambda\in\mathbf{C}:\lambda\bar{\lambda}=1\}$ の群作用で不変であり、さらに商空間 $z(\mathbf{R}^2\times U)/_\sim$ は $\mathbf{C}H^m(-4)$ の $2n$ 次元正則分布をもつ $(2n+1)$ 次元 CR-部分多様体で $\delta(2,\ldots,2)$-ideal である。ここで $z,w\in\mathbf{C}^{m+1}_1$ に対して、内積は $\langle z,w\rangle:=-z_0\bar{w}_0+\sum_{k=1}^m z_k\bar{w}_k$ で定義されている。

逆に、 $m>n+1$ の場合、linearly full であるような $\mathbf{C}H^m(-4)$ の $2n$ 次元正則分布をもつ $(2n+1)$ 次元 CR-部分多様体で $\delta(2,\ldots,2)$-ideal ものは、$\mathbf{C}H^m(-4)$ の剛性運動を除いて一意に、そのようにして得られる。

次の目標はやはり一般の $(n_1,\ldots,n_k)$-ideal を調べることであるが、今の所分類するには程遠い状況である。そこでもう一度 $(2,\ldots,2)$-ideal の性質を見直してみる。それらの平均曲率ベクトル場は平行であり、 さらに $J\mathcal{H}^\perp$ 方向の形作用素の固有値が一定であることが分かる。そこで次の問題を考える。

$(Q1)$Ideal CR−部分多様体の平均曲率ベクトル場は平行であるか？
$(Q2)J\mathcal{H}^\perp$方向の形作用素の固有値が一定であるような Ideal
CR−部分多様体を分類せよ。

まず、(Q1) の答えとして次の結果を得た。

Theorem 2 $\mathbf{C}H^m(-4)$ 内の $(2n+p)$ 次元 Ideal CR-部分多様体の平均曲率ベクトル場は平行である。特に、$p=1$, $m>n+1$ で *linearly full* ならば、*non-minimal* でかつ $\mathbf{C}H^m(-4)$ の *holomorphic circle* で *foliate* される。また $p>1$ ならば、 *minimal* で $\mathbf{C}H^m(-4)$ の *geodesic* で *foliate* される。ここで *holomorphic circle* $\gamma(s)$ とは、単位接ベクトル γ' と単位法ベクトル ξ が $|\langle\gamma',J\xi\rangle|=1$ を満たすような *circle* のことである。

Corollary 3 $\mathbf{C}H^m(-4)$ 内の $(2n+p)$ 次元 CR-部分多様体 が (2n)-*ideal* となるための必要十分条件は、平均曲率一定でかつ $\mathcal{H}^\perp$ の積分曲線が、$\mathbf{C}H^m(-4)$ の曲率 $\frac{2n+1}{2}|H|$ を持つ *holomorphic circle* になることである。

次に、(Q2) の答えとして次の結果を得た。

Theorem 4 M を $\mathbf{C}H^m(-4)$ の *linearly full* $(2n+1)$ 次元 *Ideal CR* 部分多様体とする。$J\mathcal{H}^\perp$ 方向の形作用素の固有値が一定であるための必要十分条件は、M の *Hopf fibration* による *pre-image* $\hat{M}$ が局所的に、剛性運動を除いて、次のいずれかになっていることである。

(i) $k=n$ の場合、(4.1) で表されたもの。
(ii) $k<n$ の場合、$z:\hat{M}\supset U\to \mathbf{C}_1^{m+1}$ は次で与えられる。

$$z(s,t,x_1,x_2,\ldots,y_1,y_2)=(g(x,y)e^{-(1-\alpha^2)is},\frac{\alpha\sqrt{(1-\alpha^2)}}{1-\alpha^2}e^{\frac{1-\alpha^2}{\alpha}it},\phi(x,y)e^{-(1-\alpha^2)is}), \tag{4.2}$$

ここで $\alpha=\sqrt{\frac{k}{2n-k}}, -|g|^2+|\phi|^2=-\frac{1}{1-\alpha^2}$ であり、また $z_1=(g(x,y)e^{-(1-\alpha^2)is},0,\phi(x,y)e^{-(1-\alpha^2)is})$ は $\mathbf{C}_1^m$ の *Lorentz* 計量を持つ *CR* 部分多様体で次を満たす:
次の条件を満たすような 正規直交基底 $\{E_1,\ldots,E_{2n},\tilde{E}_{2n+1}\}$ が 各点で存在する。
(a) $E_{2l}=iE_{2l-1}$ $(l=1,\ldots,n)$, $\tilde{E}_{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\frac{\partial}{\partial s}$
(b) 第二基本形式 $\tilde{h}$ の形は、

$$\tilde{h}(E_{2r-1},E_{2r-1})=\sqrt{1-\alpha^2}i\tilde{E}_{2n+1}+\phi_r\tilde{\xi}_r, \tag{4.3}$$
$$\tilde{h}(E_{2r},E_{2r})=\sqrt{1-\alpha^2}i\tilde{E}_{2n+1}-\phi_r\tilde{\xi}_r, \tag{4.4}$$
$$\tilde{h}(E_{2r-1},E_{2r})=i\phi\tilde{\xi}_r,\quad \tilde{h}(X_i,X_j)=\tilde{h}(X_i,\tilde{E}_{2n+1})=0,\quad (i\neq j) \tag{4.5}$$
$$\tilde{h}(\tilde{E}_{2n+1},\tilde{E}_{2n+1})=-\sqrt{1-\alpha^2}i\tilde{E}_{2n+1} \tag{4.6}$$

ここで $X_j\in\tilde{L}_j:=Span\{E_{n_1+\cdots+n_{j-1}+1},\ldots,E_{n_1+\cdots+n_j}\}$ $(j=1,\ldots,n)$, $n_1=\cdots=n_n=\frac{2n}{k}$, ϕ_r は関数で、$\tilde{\xi}_r$ は $i\tilde{E}_{2n+1}$ に直交する単位法ベクトル場 である。

$m=n+1$ の時、$\delta^c(2,\ldots,2)=0$ の条件と (4.3)-(4.6) の条件は常に満たされているので、Theorem 5 と Theorem 8 より M が 余次元3の場合には、$J\mathcal{H}^\perp$ 方向の形作用素の固有値が一定であるような Ideal CR 部分多様体は 完全に分類できる。

CR-部分多様体 M^{2n+1} 上には almost contact structure が入ることはよく知られているが、この構造は $M^{2n+1}\times\mathbf{R}$ 上に自然に almost complex structure を定める。これが積分可能なとき M^{2n+1} を *normal* と呼ぶ。Th 8 において、$J\mathcal{H}^\perp$ 方向の形作用素の固有値が一定であるという条件を normal に置き換えても同じ結果が得られる。

5 $\mathbf{C}P^m(4),\mathbf{C}^m$ の Ideal CR-部分多様体

前章では $\mathbf{C}H^m(-4)$ の normal ideal CR を分類した。この章では $\mathbf{C}P^m(4),\mathbf{C}^m$ の 3 次元 normal ideal CR の分類を述べる。高次元の場合は今の所よく分かっていない。$\mathbf{C}H^m(-4)$ の $(2n)$-ideal CR は常に $\mathrm{Min}\{\tau(L^{2n})\}=\tau(\mathcal{H})$ であるが、$\mathbf{C}P^m(4),\mathbf{C}^m$ 内ではそうとは限らない。では、その条件を満たすものはどれくらいあるだろうか。その答えが 以下の poposition 6, 8 である。

Proposition 5 $\mathbf{C}^m$ の 3 次元 (2)-*ideal CR*-部分多様体 で *normal* なものは $\mathbf{C}\times\mathbf{R}\to\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ に限る。

Proposition 6 $\mathbf{C}^m$ の $2n+1$ 次元 $(2n)$-*ideal CR*-部分多様体 で $\mathrm{Min}\{\tau(L^{2n})\}=\tau(\mathcal{H})$ を満たすものは $N^{2n}\times\mathbf{R}\to\mathbf{C}^{m-1}\times\mathbf{C}$ に限る。ここで N^{2n} は $\mathbf{C}^{m-1}$ の *Kaehler* 部分多様体で

Proposition 7 $\mathbf{C}P^m(4)$ の 3 次元 (2)-*ideal CR*-部分多様体 で *normal* なものは $\mathbf{C}P^2(4)$ の半径 $\frac{\pi}{4}$ の *geodesic sphere* に限る。

Proposition 8 $\mathbf{C}P^m(4)$ の $2n+1$ 次元 $(2n)$-*ideal CR*-部分多様体 で $\mathrm{Min}\{\tau(L^{2n})\} = \tau(\mathcal{H})$ を満たすものは存在しない。

$\mathbf{C}^m$ の (2n)-ideal CR-部分多様体において normal という条件と $\mathrm{Min}\{\tau(L^{2n})\} = \tau(\mathcal{H})$ という条件の間にどれくらい差があるのか分からない。たまたま 3 次元の場合に normal の方が強い条件になっているかもしれない。高次元の場合には $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}$ 以外に normal (2n)-ideal CR は存在するのかどうか今のところ分からない。また、$\mathbf{C}P^m(4)$ の 3 次元 (2)-ideal CR は normal という条件を外しても $\mathbf{C}P^2(4)$ に入ることが分かるが、それらを分類するには至っていない。

6 S^6 の Ideal CR-部分多様体

$S^6(1)$ の 3 次元部分多様体に対して $\delta(2) \le 2 + \frac{9}{4}H^2$ が成り立つ。この等号を満たすものを (2)-ideal と呼ぶ。$S^6(1)$ は nearly Kaehler structure J を持つことは良く知られているが、F. Dillen と L. Vrancken は $(S^6(1), J)$ の (2)-ideal totally real 部分多様体を完全に分類した ([11])。また、R. Deszcz, F. Dillen, L. Verstraelen, L. Vrancken らは、それらが quasi-Einstein であることを示した ([8])。前章同様、$\mathrm{Min}\{\tau(L^2)\} = \tau(\mathcal{H})$ を満たす (2)-ideal CR はどれくらいあるか調べる。

Theorem 9 $\mathrm{Min}\{\tau(L^2)\} = \tau(\mathcal{H})$ を満たす 3 次元 (2)-*ideal CR*-部分多様体 は存在しない。

$\mathbf{C}H^m(-4)$ の (2)-ideal は $\mathrm{Min}\{\tau(L^2)\} = \tau(\mathcal{H})$ の条件を常に満たす。ゆえに上の結果は全く対称的なものであり、$\mathbf{C}P^m(4)$ の (2)-ideal と似た結果となっている。次に (2)-ideal CR の general property を述べる。

Theorem 10 3 次元 (2)-*ideal CR*-部分多様体 は <u>*minimal quasi-Einstein*</u> である。さらに $\rho + \rho^\perp = 1$ を満たす。ここで $\rho = \frac{2}{n(n-1)}\tau$, $\rho^\perp = \frac{2}{n(n-1)}\sqrt{\sum_{i<j}^{n}\sum_{r<s}^{m-n}\langle R^\perp(e_i, e_j)\xi_r, \xi_s\rangle}$ (今の場合は $n = 3, m = 6$) で $R^\perp$ は法接続に関する曲率テンソルである。

定曲率 c の実空間形の部分多様体に対して次の予想がある ([10])。

$$\rho + \rho^\perp \le c + |H|^2 \quad ? \tag{6.1}$$

余次元 1 の時は Chen の不等式 ([5]) から得られ、余次元 2 の時は ([11]) の論文で正しいことが示されている。余次元 3 以上の場合、上の予想に関する最も新しい結果として、F. Dillen, P.J. Smet, L. Verstraelen, L. Vrancken らの結果がある。

Theorem 11 ([11]) $(S^6(1), J)$ の 3 次元 *totally real* 部分多様体に対して次が成り立つ。
(i) $\rho + \rho^\perp \le 1$,
(ii) (2)-*ideal* であることと $\rho + \rho^\perp = 1$ は同値。

同様のことが CR に関しても言えるのかどうかは未解決である。

7 付録

Compact stationary 部分多様体の構成法として次の方法が知られている。G を 次元 n のコンパクトリー群とし、$\pi : P \to M$ を主 G-束 とする。$d\sigma^2$ と ω をそれぞれ G 上の両側不変計量、P の 接続形式とする。M の計量 h に対して P 上の計量を $\tilde{h} = p^*(h) + \omega^*(d\sigma^2)$ と定義する。この計量は *Kaluza-Klein* 計量と呼ばれている。γ を M の閉曲線としたとき、$\mathcal{W}(p^{-1}(\gamma))$ は次を満たす ([2])。

$$\mathcal{W}(p^{-1}(\gamma)) = \frac{vol(G, d\sigma^2)}{(n+1)^{(n+1)}} \int_\gamma (\kappa^2)^{\frac{n+1}{2}} ds, \tag{7.1}$$

ここで κ は γ の曲率である。さらに $\sum$ を $\mathcal{W}$ の臨界点の集合とし、また $\mathcal{N}_G = \{p^{-1}(\gamma)\}$ とおき、さらに $\sum_G$ により $\mathcal{W}$ を $\mathcal{N}_G$ に制限した時の臨界点の集合を表した時、$\sum \cap \mathcal{N}_G = \sum_G$ が成り立つことが知られている ([12])。

このように P の G-不変、つまり $p^{-1}(\gamma)$ と表される (n+1) 次元 stationary 部分多様体は、汎関数 $\mathcal{F}(\gamma) := \int_\gamma (\kappa^2)^{\frac{n+1}{2}} ds$ の臨界点、 つまり generalized elastica により構成される。これに関する論文については、[2,3,4] を参考にして頂きたい。

参考文献

[1] M. Barros, O. Garay, *Hopf submanifolds in S^7 which are Willmore-Chen submanifolds.* Math.Z. **228** (1998), 121-129.

[2] M. Barros, *The conformal total tension variational problem in Kaluza-Klein supergravity.* Nucl. Phys. **535** (1998), 531-551.

[3] M. Barros, *Conformal tension in string theories and M-theory.* Nucl. Phys. **535** (2000), 719-748.

[4] M. Barros, *Willmore-Chen branes and Hopf T-duality.* Class. Quantum Grav. **17** (2000), 1979-1988.

[5] B. Y. Chen, *Strings of Riemannian invariants, ideal immersions and their applications.* Third Pacific Rim Geom. Conf.(Internat. Press, Cambridge, MA)(1998).

[6] B. Y. Chen, *Ideal Lagrangian immersions in complex space forms.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **128** (2000), 511-533.

[7] B. Y. Chen, C. S. Houh *On stable submanifolds with parallel mean curvature.* Quat. J. Math. Oxford. **26** (1975), 229-236.

[8] R. Deszcz, F.Dillen, L. Verstraelen, L. Vrancken, *Quasi-Einstein totally real submanifolds of the nearly Kaehler 6-sphere.* Tohoku Math. J. **51** (1999), 461-478.

[9] P. J. De Smet, F.Dillen, L. Verstraelen, L. Vrancken, *The normal curvature of totally real submanifolds of $S^6(1)$.* Glasgow Math. J. **40** (1998), 199-204.

[10] P. J. De Smet, F.Dillen, L. Verstraelen, L. Vrancken, *A pointwise inequality in submanifold theory.* Arch. Math.(Brno) **35** (1999), 115-128.

[11] F.Dillen, L. Vrancken, *Totally real submanifolds in $S^6(1)$ satisfying Chen's equality.* **348** (1996), 1633-1646.

[12] R.S. Palais, *The principal of symmetric criticality.* Commun. Math. Phys. **69** (1979), 19-30.

[13] A.M. Polyakov, *Fine structure of strings.* Nucl. Phys. **268** (1986), 406-412.

[14] T. Sasahara, *CR-submanifolds in complex hyperbolic spaces satisfying an equality of Chen.* Tsukuba. J. Math. **23** (1999), 565-583.

[15] T. Sasahara, *Three-dimensional CR-submanidolds in the nearly Kaehler six-sphere satisfying B.Y.Chen's basic equality.* Tamkang. J. Math. **31** (2000), 289-296.

[16] T. Sasahara, *On Ricci curvature of CR-submanifolds with rank one totally real ditribution.* Nihonkai Math. J, to appear.

[17] T. Sasahara, *On Chen invariant of CR-submanifolds in a complex hyperbolic space.* Tsukuba. J. Math, to appear.